Faszination der Primzahlen

Jürg Kramer

Institut für Mathematik
Humboldt-Universität zu Berlin

9. Juli 2024

Basics zu Primzahlen

Die natürlichen Zahlen

- Die Zahlentheorie beschäftigt sich mit der Untersuchung der Gesetzmäßigkeiten der natürlichen Zahlen

$$1, 2, 3, \ldots$$

Wir kürzen die Menge der natürlichen Zahlen mit $\mathbb{N}$ ab. Z. T. wird die Zahl 0 auch zu $\mathbb{N}$ gehörig betrachtet; manchmal wird diese Menge auch mit $\mathbb{N}_0$ bezeichnet.

Die natürlichen Zahlen

- Die Zahlentheorie beschäftigt sich mit der Untersuchung der Gesetzmäßigkeiten der natürlichen Zahlen

  $$1, 2, 3, \ldots$$

  Wir kürzen die Menge der natürlichen Zahlen mit $\mathbb{N}$ ab. Z. T. wird die Zahl 0 auch zu $\mathbb{N}$ gehörig betrachtet; manchmal wird diese Menge auch mit $\mathbb{N}_0$ bezeichnet.
- In der Menge der natürlichen Zahlen können die beiden Grundrechenoperationen
  - Addition $+$
  - Multiplikation $\bullet$

  uneingeschränkt ausgeführt werden.

Bausteine der natürlichen Zahlen

- Additiv betrachtet, kann jede natürliche Zahl als Summe von Einsen dargestellt werden, beispielsweise

$$5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1.$$

Wir stellen also fest: Die Zahl 1 ist der additive Grundbaustein von $\mathbb{N}$.

Bausteine der natürlichen Zahlen

- Additiv betrachtet, kann jede natürliche Zahl als Summe von Einsen dargestellt werden, beispielsweise

$$5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1.$$

  Wir stellen also fest: Die Zahl 1 ist der additive Grundbaustein von $\mathbb{N}$.

- Welches ist die entsprechende multiplikative Situation?

  Welches sind die multiplikativen Grundbausteine von $\mathbb{N}$?

Basics zu Primzahlen

Erinnerung

Eine natürliche Zahl p heißt **Primzahl**, falls $p > 1$ ist und p nur die Teiler 1 und p besitzt.

Erinnerung

Eine natürliche Zahl p heißt **Primzahl**, falls $p > 1$ ist und p nur die Teiler 1 und p besitzt.

Grundlegende Erkenntnis

Die Primzahlen sind die multiplikativen Grundbausteine von $\mathbb{N}$.

Mit anderen Worten:

Jede positive natürliche Zahl kann bis auf die Reihenfolge eindeutig als Produkt von Primzahlen dargesetllt werden, z. B.

$$1\,456\,848 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 67 \cdot 151.$$

Erste Erinnerungen an Primzahlen

Die Primzahlen zwischen 1 und 100:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17,$$

$$19, 23, 29, 31, 37, 41,$$

$$43, 47, 53, 59, 61, 67,$$

$$71, 73, 79, 83, 89, 97$$

Wir erhalten also 25 Primzahlen.

Nächste Erkenntnis

Es gibt sogar unendliche viele Primzahlen!

Wie können wir das einsehen?

Nächste Erkenntnis

Es gibt sogar unendliche viele Primzahlen!

Wie können wir das einsehen?

- Wir starten mit den beiden Primzahlen $2, 3$.

Nächste Erkenntnis

Es gibt sogar unendliche viele Primzahlen!

Wie können wir das einsehen?

- Wir starten mit den beiden Primzahlen $2, 3$.
- Jetzt betrachten wir deren Produkt, zählen 1 dazu und erhalten somit die Zahl $2 \cdot 3 + 1 = 7$.

Nächste Erkenntnis

Es gibt sogar unendliche viele Primzahlen!

Wie können wir das einsehen?

- Wir starten mit den beiden Primzahlen $2, 3$.
- Jetzt betrachten wir deren Produkt, zählen 1 dazu und erhalten somit die Zahl $2 \cdot 3 + 1 = 7$.
- Die Zahl 7 ist nun aber eine weitere Primzahl. Wir fahren wie zuvor fort und erhalten $2 \cdot 3 \cdot 7 + 1 = 43$, eine weitere Primzahl.

Basics zu Primzahlen

Nächste Erkenntnis

Es gibt sogar unendliche viele Primzahlen!

Wie können wir das einsehen?

- Wir starten mit den beiden Primzahlen $2, 3$.
- Jetzt betrachten wir deren Produkt, zählen 1 dazu und erhalten somit die Zahl $2 \cdot 3 + 1 = 7$.
- Die Zahl 7 ist nun aber eine weitere Primzahl. Wir fahren wie zuvor fort und erhalten $2 \cdot 3 \cdot 7 + 1 = 43$, eine weitere Primzahl.
- Im nächsten Schritt erhalten wir $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43 + 1 = 1\,807$, welche Produkt der beiden Primzahlen 13 und 139 ist.

Nächste Erkenntnis

Es gibt sogar unendliche viele Primzahlen!

Wie können wir das einsehen?

- Wir starten mit den beiden Primzahlen $2, 3$.
- Jetzt betrachten wir deren Produkt, zählen 1 dazu und erhalten somit die Zahl $2 \cdot 3 + 1 = 7$.
- Die Zahl 7 ist nun aber eine weitere Primzahl. Wir fahren wie zuvor fort und erhalten $2 \cdot 3 \cdot 7 + 1 = 43$, eine weitere Primzahl.
- Im nächsten Schritt erhalten wir $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43 + 1 = 1\,807$, welche Produkt der beiden Primzahlen 13 und 139 ist.
- Mit diesem Algorithmus gewinnen wir mindestens immer eine neue Primzahl dazu, da die vorliegenden Primzahlen die in Frage stehende Zahl mit Rest 1 teilen.

Basics zu Primzahlen

Die Unendlichkeit der Primzahlmenge führt nun zu mannigfachen, z. T. bis heute offenen Fragen:

- Formeln für Primzahlen?
- Verteilung der Primzahlen?
- Anzahl der Primzahlen $\leq x$?
- Sind Primzahlen auch additive Grundbausteine?
- ...

Basics zu Primzahlen

Die Unendlichkeit der Primzahlmenge führt nun zu mannigfachen, z. T. bis heute offenen Fragen:

- Formeln für Primzahlen?
- Verteilung der Primzahlen?
- Anzahl der Primzahlen $\leq x$?
- Sind Primzahlen auch additive Grundbausteine?
- ...

Die Faszination der Primzahlen liegt insbesondere in der **Dichotomie** der Verteilung der Primzahlen, die je nach Blickwinkel entweder **sehr regelmäßig** oder **absolut unregelmäßig** erscheint.

Formeln für Primzahlen?

Mersennesche Primzahlen (17. Jh.)

$$p = 2^n - 1,$$

wobei n selbst eine Primzahl ist.

- $n = 2$: $\quad 2^2 - 1 = 3.$
- $n = 3$: $\quad 2^3 - 1 = 7.$
- $n = 5$: $\quad 2^5 - 1 = 31.$
- $n = 7$: $\quad 2^7 - 1 = 127.$
- Gegenbeispiel: $2^{11} - 1 = 2\,047 = 23 \cdot 89.$

Fermatsche Primzahlen (17. Jh.)

$$p = 2^n + 1,$$

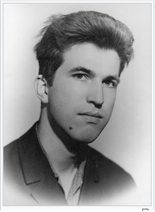
wobei $n = 2^m$ mit $m \in \mathbb{N}$.

- $n = 2^0 = 1$: $2^1 + 1 = 3$.
- $n = 2^1 = 2$: $2^2 + 1 = 5$.
- $n = 2^2 = 4$: $2^4 + 1 = 17$.
- $n = 2^3 = 8$: $2^8 + 1 = 257$.
- $n = 2^4 = 16$: $2^{16} + 1 = 65\,537$.
- Gegenbeispiel: $2^{2^5} + 1 = 4\,294\,967\,297$ teilbar durch 641.

Das Polynom von Matjasevich

Wir betrachten das folgende Polynom $\mathcal{P} = \mathcal{P}(A, B, \ldots, Y, Z)$ mit den 26 Buchstaben unseres Alphabets als Variablen:

$$(K+2)\big(1-[WZ+H+J-Q]^2-[(GK+2G+K+1)\cdot (H+J)+H-Z]^2-[16(K+1)^3(K+2)(N+1)^2+1-F^2]^2- [2N+P+Q+Z-E]^2-[E^3(E+2)(A+1)^2+1-O^2]^2- [(A^2-1)Y^2+1-X^2]^2-[16R^2Y^4(A^2-1)+1-U^2]^2- [N+L+V-Y]^2-[(A^2-1)L^2+1-M^2]^2-[AI+K+1- L-I]^2-[((A+U^2(U^2-A))^2-1)(N+4DY)^2+1- (X+CU)^2]^2-[P+L(A-N-1)+B(2AN+2A-N^2- 2N-2)-M]^2-[Q+Y(A-P-1)+S(2AP+2A-P^2- 2P-2)-X]^2-[Z+PL(A-P)+T(2AP-P^2-1)-PM]^2\big).$$



Erkenntnis von Matjasevich (1971)

Für jede Primzahl $p \in \mathbb{P}$ gibt es $a, b, \ldots, y, z \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft

$$p = \mathcal{P}(a, b, \ldots, y, z).$$

Es gibt also in der Tat eine Formel für Primzahlen!

Verteilung der Primzahlen?

Primzahllücken beliebiger Länge

Es seien p_n und p_{n+1} zwei aufeinander folgende Primzahlen. Wir nennen die Differenz $\ell = p_{n+1} - p_n$ die **Länge der Primzahllücke zwischen p_n und p_{n+1}.**

Primzahllücken beliebiger Länge

Es seien p_n und p_{n+1} zwei aufeinander folgende Primzahlen. Wir nennen die Differenz $\ell = p_{n+1} - p_n$ die **Länge der Primzahllücke zwischen p_n und p_{n+1}.**

Mit anderen Worten: Die $(\ell - 1)$ natürlichen Zahlen zwischen den Primzahlen p_n und p_{n+1} sind keine Primzahlen.

Z. B.: Zwischen 7 und 11 besteht eine Primzahllücke der Länge 4; dazwischen liegen die drei Nicht-Primzahlen $8, 9, 10$.

Primzahllücken beliebiger Länge

Es seien p_n und p_{n+1} zwei aufeinander folgende Primzahlen. Wir nennen die Differenz $\ell = p_{n+1} - p_n$ die **Länge der Primzahllücke zwischen p_n und p_{n+1}.**

Mit anderen Worten: Die $(\ell - 1)$ natürlichen Zahlen zwischen den Primzahlen p_n und p_{n+1} sind keine Primzahlen.

Z. B.: Zwischen 7 und 11 besteht eine Primzahllücke der Länge 4; dazwischen liegen die drei Nicht-Primzahlen $8, 9, 10$.

Wir konstruieren eine Primzahllücke der Mindestlänge 6:

- Bilde das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 6! = 720$.
- Dann können die 5 natürlichen Zahlen

$$720 + 2 = 722, \ldots, 720 + 6 = 726$$

keine Primzahlen sein! Wir haben Lücke der Länge ≥ 6.

Primzahlzwillinge

Paare von Primzahlen, welche unmittelbare Nachbarn sind (Primzahllücken der Länge 2).

- Kleinste Primzahlzwillinge:

$$(3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), \ldots$$

Primzahlzwillinge

Paare von Primzahlen, welche unmittelbare Nachbarn sind (Primzahllücken der Länge 2).

- Kleinste Primzahlzwillinge:

$$(3,5),(5,7),(11,13),(17,19),\ldots$$

- Größter bekannter Primzahlzwilling (2016):

$$(2996863034895 \cdot 2^{1290000} - 1, 2996863034895 \cdot 2^{1290000} + 1)$$

Verteilung der Primzahlen?

Primzahlzwillinge

Paare von Primzahlen, welche unmittelbare Nachbarn sind (Primzahllücken der Länge 2).

- Kleinste Primzahlzwillinge:

$$(3,5),(5,7),(11,13),(17,19),\ldots$$

- Größter bekannter Primzahlzwilling (2016):

$$(2996863034895 \cdot 2^{1290000} - 1, 2996863034895 \cdot 2^{1290000} + 1)$$

Bis heute offene Frage

- Gibt es unendliche viele Primzahlzwillinge?
- Yitang Zhang (2014), James Maynard (2015): Es gibt unendlich viele Paare von Primzahlen im Abstand von 272 (d. h. Primzahllücken der Länge ≤ 272).

Verteilung der Primzahlen?

Primzahlen in arithmetischer Progression

Eine Folge natürlicher Zahlen

$$a, a+m, a+2m, a+3m, \ldots \qquad (1)$$

$$\text{z. B.: } 3, 7, 11, 15, \ldots \qquad (a=3,\ m=4)$$

heißt **arithmetische Progression** mit Startwert a und Schrittweite m. Die ersten k Terme von (1)

$$a, a+m, a+2m, a+3m, \ldots, a+(k-1)m$$

bilden eine arithmetische Progression **der Länge k.**

Primzahlen in arithmetischer Progression

Eine Folge natürlicher Zahlen

$$a, a+m, a+2m, a+3m, \ldots \tag{1}$$

$$\text{z. B.: } 3, 7, 11, 15, \ldots \quad (a=3,\ m=4)$$

heißt **arithmetische Progression** mit Startwert a und Schrittweite m. Die ersten k Terme von (1)

$$a, a+m, a+2m, a+3m, \ldots, a+(k-1)m$$

bilden eine arithmetische Progression **der Länge k.**

Primzahlen in arith. Progressionen (Dirichlet, 19. Jh.)

Es seien a und m teilerfremde natürliche Zahlen. Dann enthält die arithmetische Progression

$$a, a+m, a+2m, a+3m, \ldots$$

unendlich viele Primzahlen.

Anzahl der Primzahlen $\leq x$?

Anzahl der Primzahlen $\leq x$?

Die Primzahlfunktion

Für $x \in \mathbb{R}_{>0}$, definieren wir die Treppenfunktion

- $\pi(x) :=$ Anzahl der Primzahlen kleiner oder gleich x

$$= \sharp\{p \in \mathbb{P} \mid p \leq x\}.$$

Anzahl der Primzahlen $\leq x$?

Die Primzahlfunktion

Für $x \in \mathbb{R}_{>0}$, definieren wir die Treppenfunktion

- $\pi(x) :=$ Anzahl der Primzahlen kleiner oder gleich x

  $= \sharp\{p \in \mathbb{P} \mid p \leq x\}$.

- $\pi(10) = 4$, $\pi(100) = 25$, $\pi(1000) = 168$.

Anzahl der Primzahlen $\leq x$?

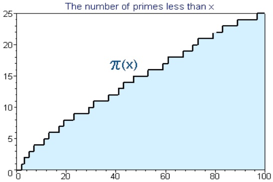
Die Primzahlfunktion

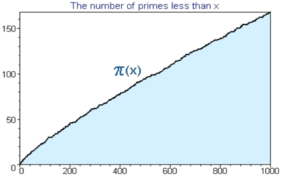
Für $x \in \mathbb{R}_{>0}$, definieren wir die Treppenfunktion

- $\pi(x) :=$ Anzahl der Primzahlen kleiner oder gleich x

$$= \sharp\{p \in \mathbb{P} \mid p \leq x\}.$$

- $\pi(10) = 4$, $\pi(100) = 25$, $\pi(1000) = 168$.





Anzahl der Primzahlen $\leq x$?

Der Primzahlsatz (Hadamard / de la Vallée-Poussin, Ende 19. Jh.)

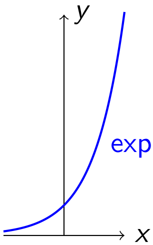
- Für $x \gg 1$, d. h. für sehr große x, besteht die Asymptotik

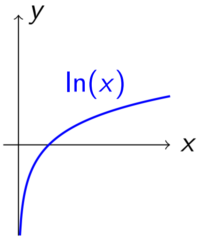
$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)} \, .$$

Der Primzahlsatz (Hadamard / de la Vallée-Poussin, Ende 19. Jh.)

- Für $x \gg 1$, d. h. für sehr große x, besteht die Asymptotik

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)} \,.$$





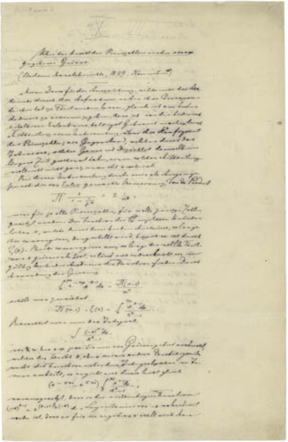
Anzahl der Primzahlen $\leq x$?

Die Riemannsche Vermutung (19. Jh.)

Es gibt eine Konstante $C > 0$, so dass die Ungleichung

$$\left| \pi(x) - \frac{x}{\ln(x)} \right| < C \cdot \sqrt{x} \cdot \ln(x)$$

besteht für $x \to \infty$.



Anzahl der Primzahlen $\leq x$?

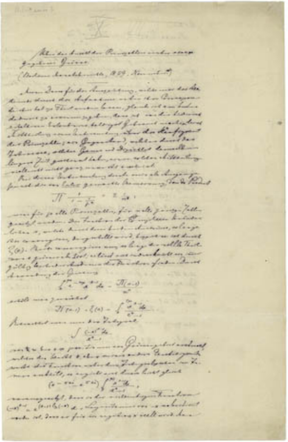
Die Riemannsche Vermutung (19. Jh.)

Es gibt eine Konstante $C > 0$, so dass die Ungleichung

$$\left| \pi(x) - \frac{x}{\ln(x)} \right| < C \cdot \sqrt{x} \cdot \ln(x)$$

besteht für $x \to \infty$.

Diese Vermutung gehört zu den 7 Millennium-Problemen und ist bis heute unbewiesen!



Sind Primzahlen auch additive Grundbausteine?

Primzahlen als additive Grundbausteine?

Wir stellen sofort fest:

- Jede gerade Zahl ist Summe von Zweien, z. B.:
  $10 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2.$
- Jede ungerade Zahl ist Summe von der Drei und Zweien, z. B.:
  $11 = 2 + 2 + 2 + 2 + 3.$

Damit kann man die beiden Primzahlen 2 und 3 also auch als additive Grundbausteine der natürlichen Zahlen verwenden.

Primzahlen als additive Grundbausteine?

Wir stellen sofort fest:

- Jede gerade Zahl ist Summe von Zweien, z. B.:
  $10 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2.$
- Jede ungerade Zahl ist Summe von der Drei und Zweien, z. B.:
  $11 = 2 + 2 + 2 + 2 + 3.$

Damit kann man die beiden Primzahlen 2 und 3 also auch als additive Grundbausteine der natürlichen Zahlen verwenden.

Es erhebt sich sofort die Frage, ob man unter Verwendung aller Primzahlen nicht effektiver vorgehen, also mit weniger Summanden auskommen kann?

Die schwache Goldbachsche Vermutung

Jede ungerade natürliche Zahl, die größer als 5 ist, ist Summe dreier Primzahlen.

Die schwache Goldbachsche Vermutung

Jede ungerade natürliche Zahl, die größer als 5 ist, ist Summe dreier Primzahlen.

- Im Jahr 1937 bewies Iwan Winogradow die schwache Goldbachsche Vermutung für genügend große natürliche Zahlen.

Die schwache Goldbachsche Vermutung

Jede ungerade natürliche Zahl, die größer als 5 ist, ist Summe dreier Primzahlen.

- Im Jahr 1937 bewies Iwan Winogradow die schwache Goldbachsche Vermutung für genügend große natürliche Zahlen.
- Im Jahr 2013 bewies Harald Helfgott die schwache Goldbachsche Vermutung für natürliche Zahlen, die größer als 10^{30} sind. Leider ist der Beweis noch nicht publiziert worden.

Die schwache Goldbachsche Vermutung

Jede ungerade natürliche Zahl, die größer als 5 ist, ist Summe dreier Primzahlen.

- Im Jahr 1937 bewies Iwan Winogradow die schwache Goldbachsche Vermutung für genügend große natürliche Zahlen.
- Im Jahr 2013 bewies Harald Helfgott die schwache Goldbachsche Vermutung für natürliche Zahlen, die größer als 10^{30} sind. Leider ist der Beweis noch nicht publiziert worden.
- Für alle natürlichen Zahlen, die kleiner als $8,875 \cdot 10^{30}$ sind, ist die Goldbachsche Vermutung mit Computerhilfe überprüft worden.

Primzahlen als additive Grundbausteine?

Die (starke) Goldbachsche Vermutung

Jede gerade natürliche Zahl, die größer als 2 ist, ist Summe zweier Primzahlen.

Filmbeispiel: $98 = 19 + 79 = 31 + 67 = 37 + 61$.

Primzahlen als additive Grundbausteine?

Die (starke) Goldbachsche Vermutung

Jede gerade natürliche Zahl, die größer als 2 ist, ist Summe zweier Primzahlen.

Filmbeispiel: $98 = 19 + 79 = 31 + 67 = 37 + 61$.

Die starke Goldbachsche Vermutung impliziert die schwache Goldbachsche Vermutung:

- Sei $n > 5$ eine ungerade natürliche Zahl.
- Dann ist $n - 3 > 2$ eine gerade natürliche Zahl.
- Nach der starken Goldbachschen Vermutung gibt es Primzahlen p_1, p_2 mit $n - 3 = p_1 + p_2$.
- Somit folgt $n = p_1 + p_2 + 3$.

Primzahlen als additive Grundbausteine?

Die (starke) Goldbachsche Vermutung

Jede gerade natürliche Zahl, die größer als 2 ist, ist Summe zweier Primzahlen.

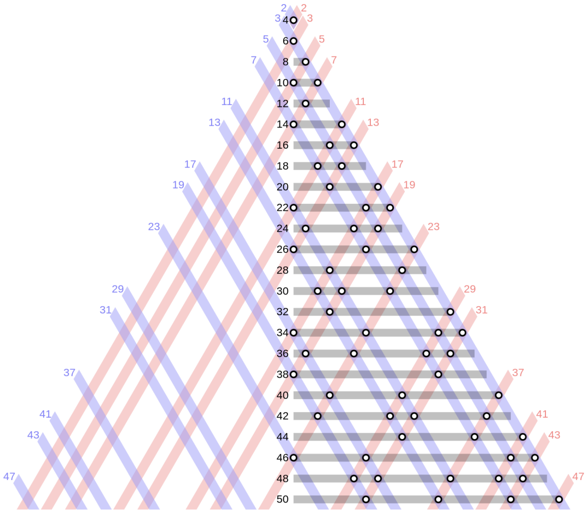
Filmbeispiel: $98 = 19 + 79 = 31 + 67 = 37 + 61$.

Die starke Goldbachsche Vermutung impliziert die schwache Goldbachsche Vermutung:

- Sei $n > 5$ eine ungerade natürliche Zahl.
- Dann ist $n - 3 > 2$ eine gerade natürliche Zahl.
- Nach der starken Goldbachschen Vermutung gibt es Primzahlen p_1, p_2 mit $n - 3 = p_1 + p_2$.
- Somit folgt $n = p_1 + p_2 + 3$.

Die starke Goldbachsche Vermutung ist bis heute unbewiesen!

Die Goldbachsche Pyramide



Die Sätze von Szemerédi und Green–Tao

Definition

Es sei $E \subseteq \mathbb{N}$ eine Teilmenge der natürlichen Zahlen. Wir sagen, dass ***E* positive Dichte in $\mathbb{N}$** hat, falls

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{|E \cap \{1, \ldots, N\}|}{N} > 0$$

gilt.

Die Sätze von Szemerédi und Green–Tao

Definition

Es sei $E \subseteq \mathbb{N}$ eine Teilmenge der natürlichen Zahlen. Wir sagen, dass ***E* positive Dichte in $\mathbb{N}$** hat, falls

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{|E \cap \{1,\dots,N\}|}{N} > 0$$

gilt.

Satz von Szemerédi (1975)

Es sei $E \subseteq \mathbb{N}$ eine Teilmenge der natürlichen Zahlen mit positiver Dichte. Dann enthält E für jedes $k \in \mathbb{N}$ unendlich viele arithmetische Progressionen der Länge k.

Definition

Es sei $E \subseteq \mathbb{N}$ eine Teilmenge der natürlichen Zahlen. Wir sagen, dass ***E* positive Dichte in $\mathbb{N}$** hat, falls

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{|E \cap \{1,\ldots,N\}|}{N} > 0$$

gilt.

Satz von Szemerédi (1975)

Es sei $E \subseteq \mathbb{N}$ eine Teilmenge der natürlichen Zahlen mit positiver Dichte. Dann enthält E für jedes $k \in \mathbb{N}$ unendlich viele arithmetische Progressionen der Länge k.

Äquivalente Formulierung: Für jedes $k \in \mathbb{N}$ und jedes $0 < \delta \leq 1$ existiert ein $N = N(k,\delta)$ derart, dass jede Teilmenge von $\{1,\ldots,N\}$ mit mehr als δN Elementen eine arithmetische Progression der Länge k enthält.

Die Sätze von Szemerédi und Green–Tao

Bemerkung: Der Primzahlsatz besagt, dass die Dichte der Primzahlmenge $\mathbb{P} \subset \mathbb{N}$ Null ist, denn

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{|\mathbb{P} \cap \{1, \ldots, N\}|}{N} = \lim_{N\to\infty} \frac{N/\ln(N)}{N} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\ln(N)} = 0.$$

Die Sätze von Szemerédi und Green–Tao

Bemerkung: Der Primzahlsatz besagt, dass die Dichte der Primzahlmenge $\mathbb{P} \subset \mathbb{N}$ Null ist, denn

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{|\mathbb{P} \cap \{1,\ldots,N\}|}{N} = \lim_{N\to\infty} \frac{N/\ln(N)}{N} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\ln(N)} = 0.$$

Dennoch gilt: Satz von Green–Tao (2004)
Die Primzahlmenge $\mathbb{P}$ enthält für jedes $k \in \mathbb{N}$ unendlich viele arithmetische Progressionen der Länge k.

Die Sätze von Szemerédi und Green–Tao

Bemerkung: Der Primzahlsatz besagt, dass die Dichte der Primzahlmenge $\mathbb{P} \subset \mathbb{N}$ Null ist, denn

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{|\mathbb{P} \cap \{1, \ldots, N\}|}{N} = \lim_{N\to\infty} \frac{N/\ln(N)}{N} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\ln(N)} = 0.$$

Dennoch gilt: Satz von Green–Tao (2004)
Die Primzahlmenge $\mathbb{P}$ enthält für jedes $k \in \mathbb{N}$ unendlich viele arithmetische Progressionen der Länge k.

Hoffnung: Nach dem Satz von Green–Tao enthält die Menge

$$E = \{a \in \mathbb{N} \mid \exists\, p_1, p_2 \in \mathbb{P},\ p_1 \neq p_2 \colon\ 2a = p_1 + p_2\}$$

unendlich viele Primzahlen. Bildeten diese Primzahlen eine Teilmenge positiver Dichte in $\mathbb{P}$, so könnte man hoffen, dass E unendl. viele arith. Progressionen bel. Länge enthält...

Nun sind wir gespannt auf den Film